(2.3) GRAFOS DE FLUJO DE SEÑAL (GFS)

Representación gráfica de la transmisión de señales a través del sistema.

(i) Fundamentos

A_{ij} función de transmisión (operador matemático que transforma x_i en x_j)

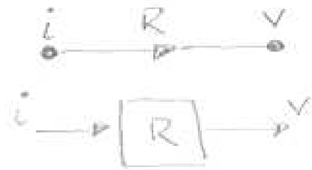
x_i, x_j variables (funciones del tiempo, frecuencia, variable de Laplace, etc.)

Se cumple $\boxed{x_j = A_{ij}\, x_i}$

"Las ramas son unidireccionales"

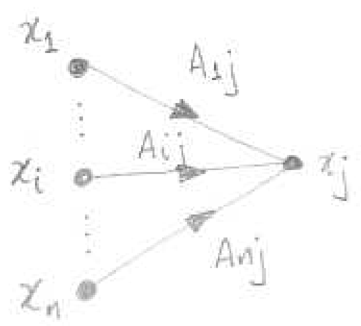
Ejemplo "Ley de Ohm"

$V = R\,i$



(ii) Algebra de los GFS

(a) Regla de adición

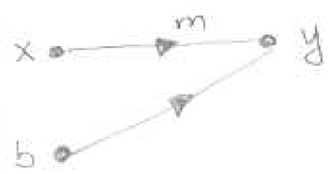


$$x_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\, x_j$$

j fijo

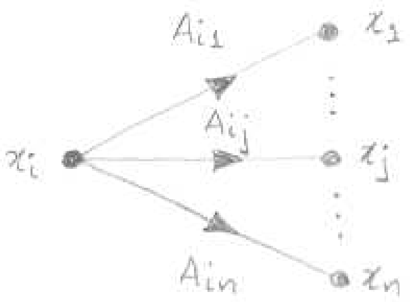
Ejemplo "Ecuación de la recta"

$y = mx + b$



Observación: Cuando no aparece la función de transmisión en la rama se asume que es UNO

(b) Regla de transmisión



$x_j = A_{ij}\, x_i$

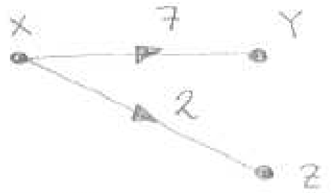
$j = 1, \dots, n$

i fijo

Ejemplo

$Z = 2X$

$Y = 7X$



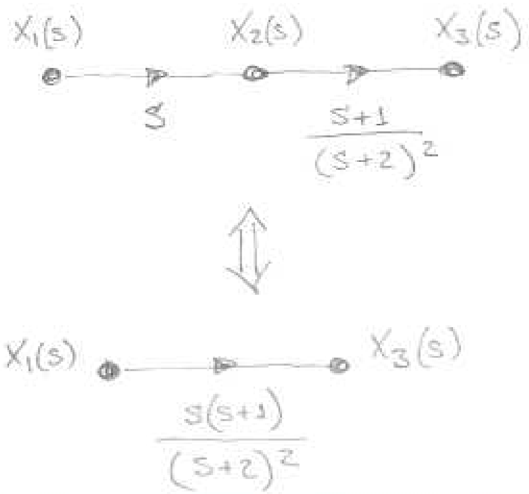
(c) Regla de multiplicación

Sucesión de ramas (cascada)

Se simplifica en

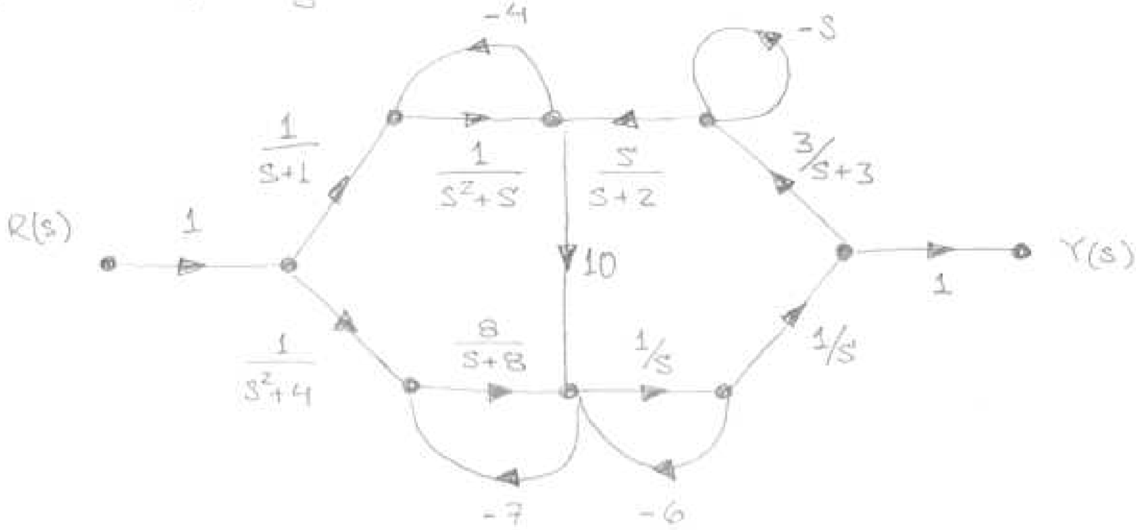
con $A = (A_{12})(A_{23}) \dots (A_{n-1,n})$ (Producto de funciones de transmisión)

Ejemplo



(iii) Definiciones asociadas a un GFS

Considere el GFS siguiente:



Trayectoria Sucesión continua unidireccional de ramas a lo largo de las cuales no se pasa por un mismo nodo más de una vez.

Nodo de entrada (Fuente) Es un nodo del cual sólo salen ramas.

Nodo de salida (Sumidero) Es un nodo al cual sólo llegan ramas.

(Puede haber más de un nodo de entrada y/o salida)

Trayectoria directa Es una trayectoria entre un nodo de entrada y un nodo de salida

Ganancia de trayectoria (P_i) Es el producto de las funciones de transmisión de las ramas que se encuentran al recorrer una trayectoria.

Lazo Es una sucesión continua unidireccional cerrada de ramas que cuando se recorre no se pasa por un mismo nodo más de una vez. Es una trayectoria cerrada (sale y llega al mismo nodo)

Ganancia de Lazo (L_i) Es el producto de las funciones de transmisión de las ramas del lazo.

Determinante (Δ)

$\Delta = 1 -$ (Suma de las ganancias de lazo) + (Suma de los productos de las ganancias de lazo de todas las posibles combinaciones de dos lazos que no se toquen) − (Suma de los productos de las ganancias de lazo de todas las posibles combinaciones de tres lazos que no se toquen) + ...

Cofactor de una trayectoria directa (Δ_i)

Es el determinante del GFS formado por la supresión de todos los lazos que tocan la trayectoria directa.

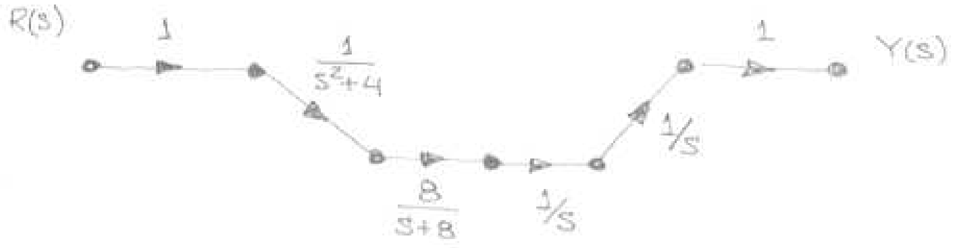
Finalmente, la función de transferencia entre el nodo de entrada y el nodo de salida, se obtiene a través de la REGLA DE GANANCIA DE MASON, la cual establece:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + \cdots}{\Delta}$$

Observación: Si existen más de un nodo de entrada y/o salida se podrán calcular más de una función de transferencia aplicando varias veces la regla de MASON entre el nodo de entrada y el nodo de salida que se seleccionen.

En lo que sigue se ilustran las definiciones anteriores a través del GFS que se dibujó previamente.

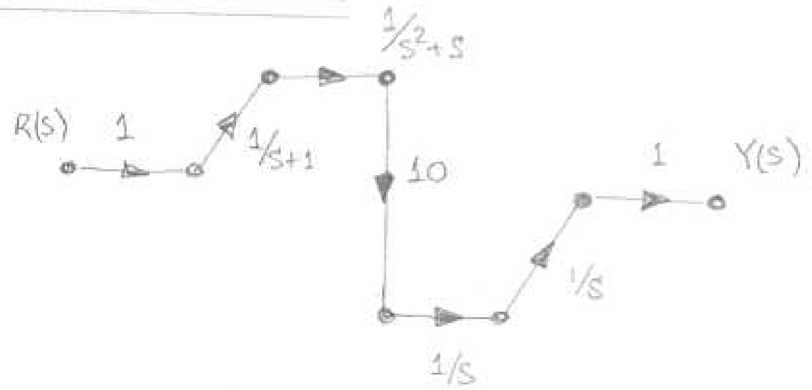
Trayectoria directa 1



Ganancia de trayectoria directa 1

$$P_1(S) = \left(\frac{1}{S^2+4}\right)\left(\frac{8}{S+8}\right)\left(\frac{1}{S}\right)\left(\frac{1}{S}\right)$$

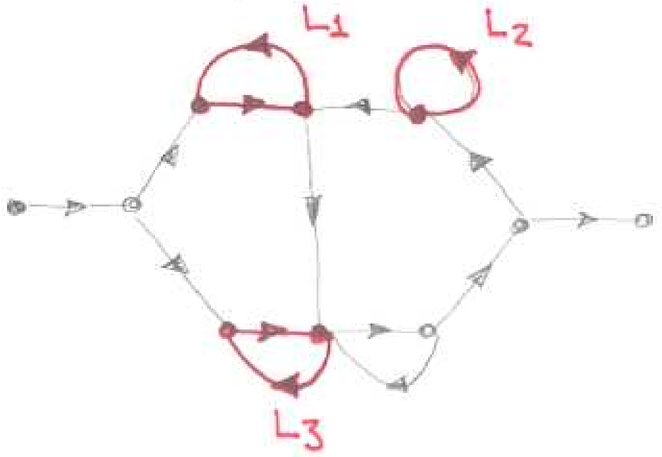
Trayectoria directa 2

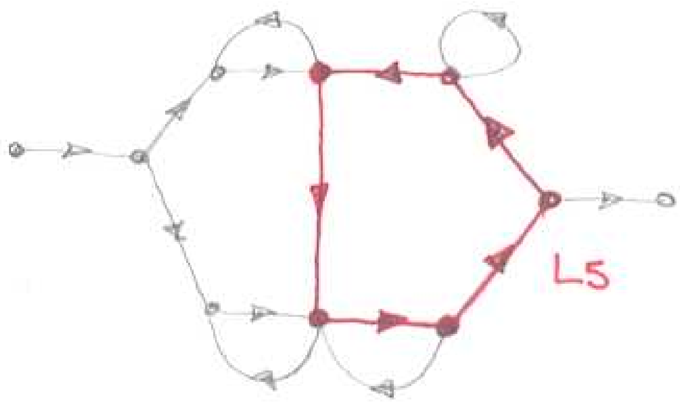


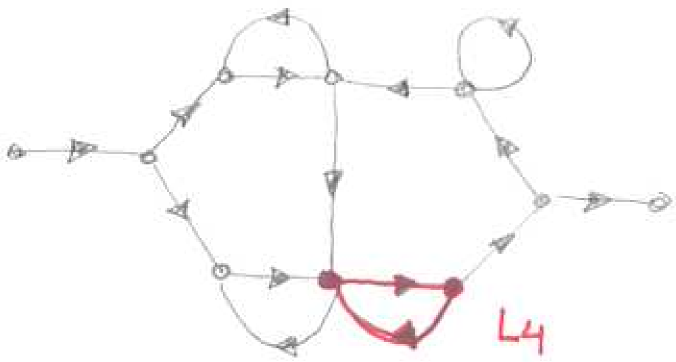
Ganancia de tray. directa 2

$$P_2(S) = \left(\frac{1}{S+1}\right)\left(\frac{1}{S^2+S}\right)(10)\left(\frac{1}{S}\right)\left(\frac{1}{S}\right)$$

No existen más trayectorias directas. Identifiquemos los Lazos.







"Repetí en varias oportunidades el GFS para que se aprecien los lazos que se tocan y los que no lo hacen. Esto es fundamental para calcular el determinante del GFS"

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) + (L_1L_2 + L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4) - (L_1L_2L_3 + L_1L_2L_4)$$

Cofactores

Tray. directa 1 toca L_3, L_4 y L_5 (se suprimen y se calcula nuevamente el determinante)

$$\Delta_1 = 1 - (L_1 + L_2) + (L_1 L_2)$$

La tray. dir. 2 toca L_1, L_3, L_4 y L_5

$$\Delta_2 = 1 - L_2$$

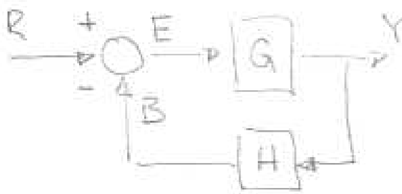
Finalmente, aplicando la regla de ganancia de Mason queda

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P_1(s)\,\Delta_1(s) + P_2(s)\,\Delta_2(s)}{\Delta(s)}$$

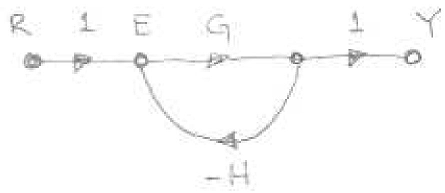
(iv) Relación entre GFS y diagrama de bloque

Variables (señales) se convierten en nodos y cada bloque en una rama

(a)



$\Longleftrightarrow$



$P_1 = G$

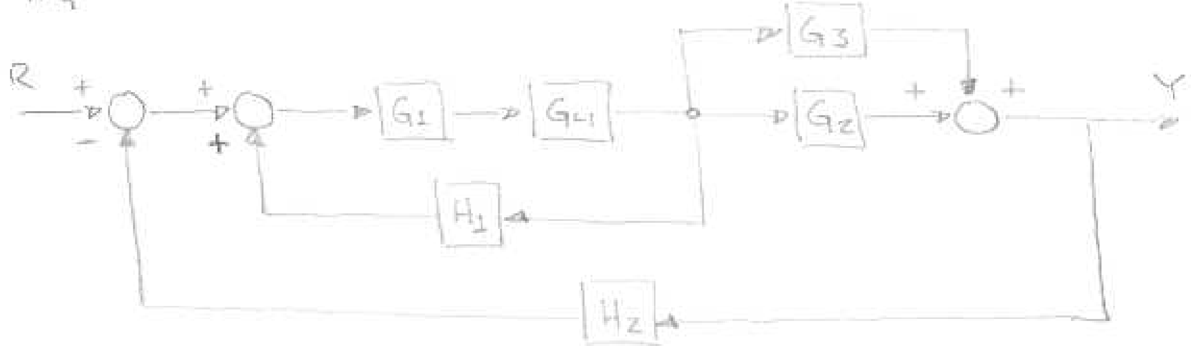
$L_1 = -GH$

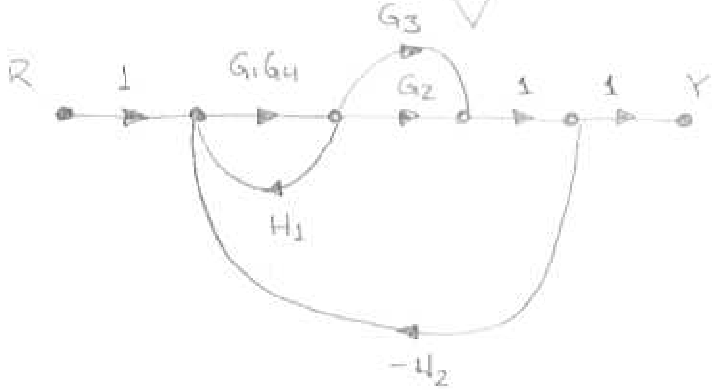
$\Delta = 1 - (-GH) = 1 + GH$

$\Delta_1 = 1$

$$\therefore \frac{Y}{R} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G}{1 + GH}$$

(b)





<u>Observación</u> La incorporación de ramas con función de transmisión unitaria facilita en muchas oportunidades la comprensión del GFS

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= G_1G_2G_4 \\ P_2 &= G_1G_3G_4 \end{aligned}\right\} \text{ tray. directas}$$

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= G_1G_4H_1 \\ L_2 &= -G_1G_2G_4H_2 \\ L_3 &= -G_1G_3G_4H_2 \end{aligned}\right\} \text{ Lazos}$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3)$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = 1$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_4 + G_1G_3G_4}{1 - G_1G_4H_1 + G_1G_2G_4H_2 + G_1G_3G_4H_2}$$